DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT 1988

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE

DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES 1 OPTIONS M, P et TA

Durée : 4 Heures

Nota : *Il est demandé au candidat de laisser à gauche de la page une marge de 4 cm*
Le sujet comporte un problème et un exercice.

Note très importante : *Toute copie illisible ou mal présentée sera pénalisée. Les résultats demandés seront soigneusement encadrés et mis en évidence, et les démonstrations seront étayées par des références précises à des théorèmes du cours.*

PROBLEME

Notations : On note $\mathbb{Z}^*_-$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls :

$$\mathbb{Z}^*_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

Dans tout le problème, x désigne une variable réelle.

p étant un entier supérieur ou égal à 2, on pose $z(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

ln (x) désigne le logarithme népérien de x

PREMIERE PARTIE :

1) Pour n entier supérieur ou égal à 1, on considère la suite

$$u_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \ldots + \frac{1}{n+x} - \ln(n)$$

Pour quelles valeurs de x la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle définie ?

2) Pour $n \geq 2$, on pose $w_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$ .. Etudier la convergence de la série de terme général $w_n(x)$.

3) En déduire l'ensemble de définition D de la fonction de la variable réelle x : $A(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$.

On donne $C = A(0) \cong 0{,}577$. Cette valeur numérique sera calculée dans la septième partie.

4) Soit $x \in D$. Démontrer que $A(x+1) = A(x) - \frac{1}{1+x}$. En déduire, en fonction de C, les valeurs de A (1), A (2), et A (3).

5) n étant entier, prouver que $\lim_{n \to +\infty} [A(n) + \ln(n)] = 0$.

DEUXIEME PARTIE :

1) Démontrer que, $\forall x \in D$: $u_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k + \frac{x-1}{2}} + \ln(2n)$

2) En déduire que, $\forall x \in D$: $A(x) = \frac{1}{2} A(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} A(\frac{x-1}{2}) - \ln 2$.

3) Calculer en fonction de C les valeurs de $A(\frac{1}{2})$, $A(-\frac{1}{2})$, $A(\frac{3}{2})$ et $A(-\frac{3}{2})$

4) Prouver que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$A(px) = \frac{1}{p} \cdot \left[A(x) + A(x - \frac{1}{p}) + \ldots + A(x - \frac{p-1}{p}) \right] - \ln p.$$

En déduire la valeur de $I = \int_0^1 A(x)\,dx$.

TROISIEME PARTIE :

1) Calculer $u'_n(x)$ et démontrer que, $\forall x \in D$, $u'_n(x)$ admet une limite v (x) lorsque $n \to +\infty$.

2) Soit [a, b] un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $[a, b] \cap \mathbb{Z}^*_- = \emptyset$.

On pose $M = \text{Max}(|a|, |b|)$. Montrer que :

$$\forall x \in [a, b],\ \forall n \geq M,\ |u'_n(x) - v(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-M)^2}$$

T. S. V. P.

3) En déduire que la fonction A est dérivable sur D et que : $A'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$

4) Déterminer les limites de A (x) lorsque $x \to n$ $(n \in \mathbb{Z}^*_-)$.

5) Démontrer que, lorsque $x \to +\infty$: $A(x) = -\ln x + \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

6) Dresser le tableau de variations de la fonction A , et donner l'allure de sa courbe représentative.

QUATRIEME PARTIE :

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \cos(\alpha x) & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ f \text{ est périodique de période } 2\pi . \end{cases}$$

Enoncer le théorème précis qui permet d'affirmer que f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2) Déterminer la série de Fourier de f.

3) En déduire que, $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotan}(\pi\alpha) - \frac{1}{\alpha}$

4) Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$: $A(x) - A(-x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x) \frac{1}{x}$.

CINQUIEME PARTIE :

1) En s'inspirant de la troisième partie, démontrer que A est indéfiniment dérivable sur D et donner l'expression de sa dérivée p-ième.

2) Démontrer que, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, A admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 , et que celui-ci vaut :

$$A(x) = C - z(2)x + z(3)x^2 - \dots + (-1)^p z(p+1)x^p + x^p \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

3) Calculer le développement limité à l'ordre 6 , au voisinage de 0 ,

de $g(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - \frac{1}{x}$, et en déduire les valeurs de z (2) , z (4) et z (6).

4) On considère la série $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^3 - 2n^2 + 4n - 2}{n^4(2n-1)}$ Démontrer que cette série est convergente et calculer sa somme.

SIXIEME PARTIE :

1) On considère l'intégrale généralisée : $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2\pi x)}{x} dx$.

Justifier l'existence de cette intégrale.

2) Démontrer que $I = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \int_0^1 \frac{\sin(2\pi t)}{n+t} dt \right)$

3) En déduire que $I = \int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot A(t)\, dt$.

4) Démontrer que :

$$2I = \pi \int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \operatorname{cotan}(\pi t)\, dt - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi t)}{t} dt + \int_0^1 \frac{\sin(2\pi t)}{1-t} dt$$

5) Déduire de ce qui précède la valeur de $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

SEPTIEME PARTIE

1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe C^2 sur [0,1].
Démontrer que :

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2} \int_0^1 f''(x)(x - x^2)\, dx.$$

2) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - R_n$,

avec $0 \le R_n \le \frac{1}{6n^3}$.

3) Démontrer que , $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $C - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = -\frac{1}{2n} + \sum_{k=n}^{+\infty} R_k$.

En déduire l'encadrement (pour $n \ge 2$) :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \ln n \le C \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n} - \ln n + \frac{1}{12(n-1)^2}$$

4) Utiliser cet encadrement pour retrouver la valeur approchée de C fournie à la première partie.

T. S. V. P.

ECOLES MILITAIRES: E.S.I.E.T.A.

Les 2 EXERCICES suivants se répartissent ainsi :
EXERCICE 1 : RESERVE A L'OPTION TA
EXERCICE 2 : RESERVE AUX OPTIONS M ET P

EXERCICE 1 - OPTION TA

On considère l'équation différentielle :

(E) $xy'' + (x - 4)y' - 3y = 0$

1) Chercher les solutions développables en série entière. Montrer que l'une d'elles est un polynôme unitaire, que l'on notera P.

2) Donner la solution générale de (E). Sur quel intervalle de $\mathbb{R}$ est-elle définie ?

3) Déterminer une fonction $\rho : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ telle que, pour toute solution y de (E):

$$3y\rho = (x\rho y')' .$$

4) Démontrer qu'il existe un entier n, et une constante λ, que l'on déterminera, tels que :

$$P(x) = \frac{\lambda}{\rho(x)} \left[x^n \rho(x) \right]^{(n)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*;$$

(On note $[f(x)]^{(n)}$ la dérivée n-ième de f au point x).

EXERCICE 2 - OPTIONS M ET P

ETUDE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR $\mathbb{R}$ ET NON DERIVABLE EN TOUT POINT DE $\mathbb{R}$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

i) f_n est périodique de période $\frac{1}{2^{n-1}}$

ii)
$$f_n(x) = \begin{cases} x \text{ sur } [0, \frac{1}{2^n}] \\ \\ \frac{1}{2^{n-1}} - x \text{ sur } [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}] \end{cases}$$

Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_n(x) = \sum_{p=1}^{p=n} f_p(x) \\ \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout élément x de $\mathbb{R}$, la suite $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente (on notera g (x) la limite) et que la fonction g ainsi définie est une fonction périodique dont on céterminera la période.

2) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

3) Etudier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$ (on pourra se limiter à x dans [0 , 1] et considérer $\dfrac{g(x + \frac{1}{2^n}) - g(x)}{\frac{1}{2^n}}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail